

Esempio 9.4

L'oggetto aleatorio per antonomasia è il dado. Quando lo lanciamo, la probabilità di una qualunque delle facce (per esempio, ⊞) è pari a $1/6$. Prima di lanciare il dado, l'incertezza riguardo ⊞ è pari a $\text{In}(\text{⊞}) = \log_2(6) \cong 2.585$ bit. Se davvero esce ⊞ abbiamo ricevuto una quantità di informazione pari a $\log_2(6) \cong 2.585$ bit, cioè uguale all'incertezza rimossa. L'informazione apportata dall'osservare $\text{⊞} \text{⊞}$ in due lanci consecutivi è semplicemente pari a $\text{In}(\text{⊞}) + \text{In}(\text{⊞}) \cong 5.170$ bit, visto che i due lanci sono *indipendenti*.

9.3.2 Quantità di informazione di una sorgente senza memoria

Torniamo alla sorgente digitale, forti di una nuova definizione di informazione. Evidentemente, l'osservazione di un simbolo $S[n] = s_m$ porta una quantità di informazione pari a $\text{In}(s_m) = \log_2(1/p_m)$, proprio come nell'**Esempio 9.4**. È semplice, a questo punto, calcolare la quantità di informazione apportata *mediamente* dall'emissione di un singolo simbolo di sorgente:

$$H(S) \triangleq \sum_{m=1}^M p_m \text{In}(s_m) = \sum_{m=1}^M p_m \log\left(\frac{1}{p_m}\right) \text{ bit} \quad (9.3.3)$$

Questa *informazione media*, che caratterizza il contenuto informativo medio di un singolo simbolo della sorgente in una lunga stringa, è univocamente determinata dalla legge di probabilità della sorgente stessa ed è chiamata *entropia di Shannon* della sorgente senza memoria.³

Esempio 9.5

Studiamo un caso particolarmente semplice, quello di una *sorgente binaria* priva di memoria e assumiamo, per semplicità, che siano $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$. Tale sorgente è caratterizzata dalla probabilità p di presentazione del simbolo 0, $\text{Pr}\{0\} = p$, la quale determina anche $\text{Pr}\{1\} = 1 - p$. Il calcolo dell'entropia è immediato:

$$H(S) = p \log\left(\frac{1}{p}\right) + (1 - p) \log\left(\frac{1}{1 - p}\right) \triangleq \eta(p) \quad (\text{E9.5.1})$$

Dal grafico della funzione $\eta(p)$ riportato nella **Figura 9.4** ricaviamo alcune proprietà che possono essere generalizzate con facilità, estendendole a una sorgente M -aria qualunque:

- $H(S) \geq 0$ (banale);

³ Il termine *entropia* è stato adottato da Claude Shannon per indicare questa misura di informazione da egli stesso formalizzata negli anni '40 del secolo scorso dopo gli studi pionieristici di Hartley degli anni '20. L'appellativo si rifà al concetto di entropia di un sistema fisico: in meccanica statistica, Boltzmann scoprì che l'entropia termodinamica è proporzionale (attraverso l'omonima costante k) al logaritmo del numero N degli stati che il sistema fisico può occupare. Se gli stati sono equiprobabili, N è anche pari all'inverso della probabilità di occupazione di ogni stato ($1/N$, appunto), in modo consistente con la definizione di Shannon. D'altronde, se gli stati sono equiprobabili, il sistema è nello stato di massimo disordine e, da nozioni di fisica elementare, l'entropia è notoriamente massima: questa quantità dà un'indicazione del grado di *disordine* o *incertezza* del sistema.